

1/3/21

Διαγωνισμός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.2. (1)

$$1) f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+\sqrt{2})^2 (x^2+x+1)^3 \in \mathbb{R}[x]$$

Βρείτε $g(x) \in \mathbb{R}[x]$, μονικό, ώστε $g(x) \mid f(x) \Rightarrow g(x) =$

$$g(x) = (x-1)^a (x+\sqrt{2})^b (x^2+x+1)^c$$

$$0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 \\ x+\sqrt{2} \\ x^2+x+1 \\ (x-1)^2 \\ (x-1)^2(x+\sqrt{2}) \\ (x-1)^2(x+\sqrt{2})(x^2+x+1) \end{array} \right.$$

$h(x) \in \mathbb{R}[x]$, μονικό, ώστε $h(x) \mid f(x)$ να έχουν
ως ιδες ρίζες

$$h(x) = (x-1)^{a'} (x+\sqrt{2})^{b'} (x^2+x+1)^{c'} \quad , 1 \leq a' \leq 3, 1 \leq b' \leq 2, 0 \leq c' \leq 3$$

2) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow$ Το $f(x)$ έχει πραγματική ρίζα. Είναι αυτός ένας αριθμός?

Έστω $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ ρίζα του $f(x)$. $(p, q) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{p^3}{q^3} + 7\frac{p^2}{q^2} + 3\frac{p}{q} + 1 = 0 \Rightarrow p^3 + 7p^2q + 3pq^2 + q^3 = 0$$

$$\Rightarrow p^3 + (7p^2 + 3pq + q^2) \cdot q = 0$$

Ο q διαιρεί τον p^3 . Αλλά $(p, q) = 1$. Άρα ο μόνος διαιρέτης θα είναι ± 1 .

$f(1) > 0$ και $f(-1) > 0$. Δεν έχει ρίζα.

$$g(x) = x^4 + 1 > 0 \text{ Δεν έχει ρίζα } \frac{p^4}{q^4} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^4 + q^4 = 0 \quad (p, q) = 1 \Rightarrow \text{αδύνατο}$$

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \text{ άρα δεν είναι αδύνατο στον } \mathbb{R}[x]$$

$$x^2 - \sqrt{2}x + 1 \notin \mathbb{Q}[x] \text{ . ενώ στον } \mathbb{Q}[x] \text{ όχι}$$

Θα υποθέσουμε ότι $x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ με $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ και θα μεταλλίζουμε σε άκρο

5) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}$ Διαγωνοποιούμε?

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 13 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9 + 13 = \lambda^2 + 4 > 0$$

Στους πραγματικούς δεν διαγωνοποιείται: $\lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i$
 Έχει 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές στους μιγαδικούς ΘΕΩΡΗΜΑ
 Διαγωνοποιείται:

$$V(-2i) = \langle (3-2i, 13) \rangle, \quad V(2i) = \langle (3+2i, 13) \rangle$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} - \lambda & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \right)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

Μιγαδικές ρίζες: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, δεν

διαγωνοποιείται στους πραγματικούς

$$C = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \lambda^2 - 1$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow$ Διαγωνοποιείται στους πραγματικούς

$$V(-1): (C - (-1)I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + 1 \cdot y = 0 \\ 1 \cdot x + (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -(1+\sqrt{2})y$$

$$V(-1) = \left\{ -(1+\sqrt{2})y, y \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \langle (1+\sqrt{2}, -1) \rangle$$

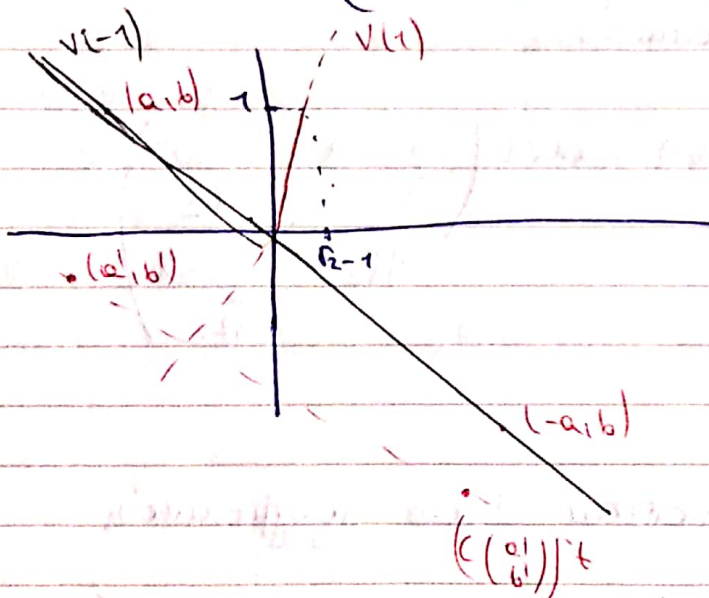
$$V(1) = \langle (\sqrt{2}-1, 1) \rangle$$

$$C \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

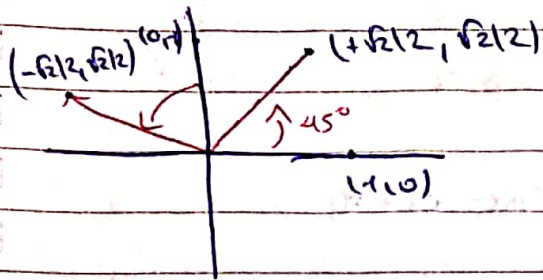
$$(a, b) \mapsto \left(C \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^t = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$$



0 C είναι line orthogonal
ws ngos zw ajora (euclidean)
V(-1)

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Ο πίνακας δίνει στροφή κατά 45°

6) $Au = 5u \Rightarrow A \cdot u - 2u = 3u \Rightarrow (A - 2I)u = 3u \Rightarrow 3$ ιδιοτιμή
($A - 2I$)

7) $AB = BA$, $Au = \lambda u$ με $\lambda \neq 0 \Rightarrow B(Au) = B(\lambda u) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (BA)u = \lambda Bu \Rightarrow (AB)u = \lambda \cdot Bu \Rightarrow A \cdot (Bu) = \lambda \cdot Bu \Rightarrow$
 $\Rightarrow Bu$ είναι ιδιοδιάνυσμα

8) $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα?

• Αν $b = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \dots & a \end{pmatrix} = a \cdot I$, ιδιοτιμή a
 ιδιοδιανύσματα με όποια
 βάση θέλω

• Αν $b \neq 0$: $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b & b & \dots & b & b \\ b & a-\lambda & b & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & b & a-\lambda \end{pmatrix} =$

$= \det \begin{pmatrix} a-\lambda + (n-1)b & b & b & \dots & b & b \\ a-\lambda + (n-1)b & a-\lambda & b & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a-\lambda + (n-1)b & b & b & \dots & b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda + (n-1)b) \det \begin{pmatrix} 1 & b & b & \dots & b & b \\ 1 & a-\lambda & b & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \dots & b & a-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det A = (a - \lambda + (n-1)b)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & b & b & \dots & b & b \\ 0 & a-\lambda-b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-\lambda-b & 0 \end{pmatrix} = (a - \lambda - b)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a + (n-1)b \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \dots = \lambda_n = a - b$$

$$V(a + (n-1)b) (A - (a + (n-1)b)I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -(n-1)b & b & \dots & b \\ b & -(n-1)b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & -(n-1)b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -n & 0 & \dots & 0 & 1-1+n \\ 0 & -n & \dots & 0 & 1-1+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -n & 1-1+n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_n = 0 \\ -x_2 + x_n = 0 \\ \vdots \\ -x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_n = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + (1-n)x_n = 0 \Rightarrow (n-1) \cdot x_n + (1-n)x_n = 0$$

$$\forall (a + (n-1)b) = \langle (x_n, x_n, \dots, x_n) \rangle = \langle (1, 1, \dots, 1) \rangle$$

$$\forall (a-b): (A - (a-b)I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-a+b & b & \dots & b \\ b & a-a+b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a-a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0 \\ x_n &= -x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} \end{aligned}$$

$$\forall (a-b) = \{ (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) \mid x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1) \rangle$$

Πολύτα ως $\lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = a-b$ είναι $n-1 = \dim V(a-b) \Rightarrow$
 $\Rightarrow A$ διαγωνοποιείται

Π.χ. Να βρεθεί ως απέναντι $a, b, t \in \mathbb{R}$ ώστε 0

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 3 & t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ να διαγωνοποιείται}$$

Λύση: $\lambda_1 = 3 = \lambda_2, \lambda_3 = 2$. Η λ_3 έχει πολύτα 1 $\Rightarrow$
 $\dim(V(\lambda_3=2)) = 1$. Άρα $\dim V(1) = 2$ ώστε 0 A να
 διαγωνοποιείται:

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ θέλουμε να } \dim \ker(A - 3I) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A - 3I) = 3 - 2 = 1$$

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A - 3I) = 1 \Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$$